МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой
цифровых технологий

Кургалин С. Д.

03.05.2023г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.О.13 Линейная алгебра

1. **Код и наименование направления подготовки:**
   02.03.01Математика и компьютерные науки
2. **Профиль подготовки:**
   Квантовая теория информации, Распределенные системы и искусственный интеллект;
3. **Квалификация выпускника:**
   бакалавр
4. **Форма обучения:** очная
5. **Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:**
   кафедра цифровых технологий
6. **Составители программы:**
   Вахитова Екатерина Васильевна, кандидат физико-математических наук, профессор
7. **Рекомендована:**
   НМС ФКН (протокол № 7 от 03.05.23)
8. **Учебный год:** 2023-2024 **Семестр:** 1, 2

9. Цели и задачи учебной дисциплины

Целью освоения учебной дисциплины является:

– формирование представлений о линейной алгебре: системы линейных уравнений, матрицы, определители, векторные (линейные) пространства, алгебраические структуры, алгебра многочленов и о компьютерной алгебре

Задачи учебной дисциплины:

– изучить основные понятия и уметь доказывать теоремы линейной алгебры;

– уметь применять результаты линейной алгебры при решении задач.

10. Место учебной дисциплины в структуре ООП:

Дисциплина относится к обязательной части учебного плана.

Требования к входным знаниям, умениям и навыкам: иметь знания по школьному курсу математики.

11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями) и индикаторами их достижения:

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ОПК-1	Способен применять естественнонаучные и общеинженерные знания, методы линейной алгебры и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности.	ОПК-1.1	Знает основы математики, физики, вычислительной техники и программирования.	Знать: основные понятия и факты в области линейной алгебры
		ОПК-1.2	Умеет решать стандартные профессиональные задачи с применением естественнонаучных и общеинженерных знаний, методов линейной алгебры и моделирования.	Уметь: формулировать и доказывать теоремы, самостоятельно решать задачи линейной алгебры
		ОПК-1.3	Владеет навыками теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности.	Владеть: навыками практического использования методов линейной алгебры при решении различных задач

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час — 9/34.

Форма промежуточной аттестации: экзамен 1, 2

13. Трудоемкость по видам учебной работы

Вид учебной работы		Трудоемкость		
		Всего	По семестрам	
			1 семестр	2 семестр
Аудиторные занятия		132	84	48
в том числе:	лекции	82	50	32
	практические	50	34	16
	лабораторные	0	0	
Самостоятельная работа		120	96	24
Текущая аттестация		72	36	36

Форма промежуточной аттестации(экзамен)	72	36	36
Итого:	216	108	324

13.1. Содержание дисциплины

№п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК*
		1. Лекции	
1.1	Системы линейных уравнений над полем, матрицы над полем и определители	Системы линейных уравнений над полем, следствие СЛУ. Ранг матрицы, ступенчатая матрица. Критерий совместности СЛУ. Решение СЛУ методом последовательного исключения переменных. Однородная СЛУ, фундаментальная система решений однородной СЛУ. Операции над матрицами. Обратимая квадратная матрица, обратная матрица. Матричная форма записи СЛУ, теорема. Жорданова нормальная форма матрицы. Определители, их свойства. Разложение определителя по строке (или столбцу). Способы вычисления обратной матрицы и ранга матрицы. Правило Крамера.	
1.2	Векторные пространства над полем, линейные отображения и линейные операторы	Основные понятия векторного пространства. Линейная зависимость и линейная независимость системы векторов. Разложение вектора по базису. Изоморфизм векторных пространств одинаковой размерности. Линейное отображение. Линейные операторы, матрица линейного оператора. Связь между координатными столбцами векторов x и f(x). Связь между координатными столбцами вектора относительно различных базисов. Связь между матрицами линейного оператора относительно различных базисов. Теорема о связи дефекта и ранга линейного оператора. Евклидово векторное пространство. Собственные векторы и собственные значения, характеристическое уравнение.	
1.3	Группы, кольца, поля; комплексные числа	Группа, простейшие свойства группы. Кольцо, простейшие свойства кольца. Поле, простейшие свойства поля. Подгруппа, критерий подгруппы. Подкольцо, подполе. Кольцо целых чисел. Поле комплексных чисел. Извлечение квадратного корня из комплексного числа в алгебраической форме. Числовое поле, теорема о наименьшем числовом поле. Тригонометрическая форма комплексного числа. Формула Муавра.	
1.4	Многочлены над произвольным полем	Кольцо многочленов, степень многочлена. Корни многочлена, теорема Безу, схема Горнера. Теорема о делении с остатком. Алгоритм Евклида. Неприводимые многочлены. Квадратичные формы.	
1.5	Многочлены над числовыми полями C и **R**	Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел. Разложение многочлена над полем комплексных чисел. Разложение многочлена над полем действительных чисел. Уравнения третьей и четвертой степени.	
1.6	Введение в компьютерную алгебру	Что такое компьютерная алгебра. Системы компьютерной алгебры. Алгоритмы	

		компьютерной алгебры. Задача представления данных. Кольцо целых чисел. Кольцо классов вычетов. Конечные поля. Рациональные числа, алгебраические числа. Минимальный многочлен.	
2. Практические занятия			
2.1	Системы линейных уравнений над полем, матрицы над полем и определители	Системы линейных уравнений над полем, следствие СЛУ. Ранг матрицы, ступенчатая матрица. Критерий совместности СЛУ. Решение СЛУ методом последовательного исключения переменных. Однородная СЛУ, понятие фундаментальной системы решений однородной СЛУ. Операции над матрицами. Обратимая квадратная матрица, обратная матрица. Матричная форма записи СЛУ, теорема. Определители, их свойства. Разложение определителя по строке (или столбцу). Второй способ вычисления обратной матрицы и ранга матрицы. Правило Крамера.	
2.2	Векторные пространства над полем, линейные отображения и линейные операторы	Основные понятия векторного пространства. Линейная зависимость и линейная независимость системы векторов. Разложение вектора по базису. Изоморфизм векторных пространств одинаковой размерности. Линейное отображение. Линейные операторы, матрица линейного оператора. Связь между координатными столбцами векторов x и f(x). Связь между координатными столбцами вектора относительно различных базисов. Связь между матрицами линейного оператора относительно различных базисов. Теорема о связи дефекта и ранга линейного оператора. Основные понятия евклидова векторного пространства. Собственные векторы и собственные значения, характеристическое уравнение.	
2.3	Группы, кольца, поля; комплексные числа	Группа, простейшие свойства группы. Кольцо, простейшие свойства кольца. Поле, простейшие свойства поля. Подгруппа, критерий подгруппы. Подкольцо, подполе. Кольцо целых чисел. Поле комплексных чисел. Извлечение квадратного корня из комплексного числа в алгебраической форме. Числовое поле, теорема о наименьшем числовом поле. Тригонометрическая форма комплексного числа. Формула Муавра.	
2.4	Многочлены над произвольным полем	Кольцо многочленов, степень многочлена. Корни многочлена, теорема Безу, схема Горнера. Теорема о делении с остатком. Алгоритм Евклида. Неприводимые многочлены. Квадратичные формы.	
2.5	Многочлены над числовыми полями C и **R**	Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел. Разложение многочлена над полем комплексных чисел. Разложение многочлена над полем действительных чисел. Уравнения третьей и четвертой степени.	
2.6	Введение в компьютерную алгебру	Что такое компьютерная алгебра. Системы компьютерной алгебры. Алгоритмы компьютерной алгебры. Задача представления данных. Кольцо целых чисел. Кольцо классов вычетов. Конечные поля. Рациональные числа, алгебраические числа. Минимальный многочлен.	

13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (количество часов)			
		Лекции	Практические /Лабораторные	Самостоя-тельная работа	Всего
1	Системы линейных уравнений над полем, матрицы над полем и определители	20	12	30	62
2	Векторные пространства над полем, линейные отображения и линейные	18	10	30	58
3	Группы, кольца, поля; комплексные числа	14	10	36	60
4	Многочлены над произвольным полем	12	6	6	24
5	Многочлены над числовыми полями С и **R**	12	8	10	30
6	Введение в компьютерную алгебру	6	4	8	18
	Итого:	82	50	120	252

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Освоение дисциплины складывается из аудиторной работы (учебной деятельности, выполняемой под руководством преподавателя) и внеаудиторной работы (учебной деятельности, реализуемой обучающимся самостоятельно).

Аудиторная работа состоит из работы на лекциях и выполнения практических заданий в объёме, предусмотренном учебным планом. Лекция представляет собой последовательное и систематическое изложение учебного материала, направленное на знакомство обучающихся с основными понятиями и теоретическими положениями изучаемой дисциплины.

Лекционные занятия формируют базу для практических занятий, на которых полученные теоретические знания применяются для решения конкретных практических задач. Обучающимся для успешного освоения дисциплины рекомендуется вести конспект лекций и практических занятий.

Самостоятельная работа предполагает углублённое изучение отдельных разделов дисциплины с использованием литературы, рекомендованной преподавателем, а также конспектов лекций, конспектов практических занятий. В качестве плана для самостоятельной работы может быть использован раздел 13.1 настоящей рабочей программы, в котором зафиксированы разделы дисциплины и их содержание. В разделе 13.2 рабочей программы определяется количество часов, отводимое на самостоятельную работу по каждому разделу дисциплины. Большее количество часов на самостоятельную работу отводится на наиболеетрудные разделы дисциплины. Для самостоятельного изучения отдельных разделов дисциплины используется перечень литературы и других ресурсов, перечисленных в пунктах 15 и 16 настоящей рабочей программы. Обязательным элементом самостоятельной работы является выполнение домашнего задания.

Успешность освоения дисциплины определяется систематичностью и глубиной аудиторной и внеаудиторной работы обучающегося.

При использовании дистанционных образовательных технологий и электронного обучения требуется выполнять все указания преподавателей, вовремя подключаться к онлайн-занятиям, ответственно подходить к заданиям для самостоятельной работы.

В рамках дисциплины предусмотрено проведение трёх текущих аттестаций за семестр. Результаты текущей успеваемости учитываются при выставлении оценки по промежуточной аттестации в соответствии с положением П ВГУ 2.1.04.16–2019 «Положение о текущей и промежуточной аттестации знаний, умений и навыков обучающихся на факультете компьютерных наук Воронежского государственного университета с использованием балльно-рейтинговой системы».

Обучение лиц с ограниченными возможностями здоровья осуществляется с учетом их индивидуальных психофизических особенностей и в соответствии с индивидуальной программой реабилитации. Для лиц с нарушением слуха при необходимости допускается присутствие на лекциях и практических занятиях ассистента, а также сурдопереводчиков и тифлосурдопереводчиков. Промежуточная аттестация для лиц с нарушениями слуха проводится в письменной форме, при этом используются общие критерии оценивания. При необходимости время подготовки на зачете может быть увеличено. Для лиц с нарушением зрения допускается аудиальное предоставление информации (например, с использованием программ-синтезаторов речи), а также использование на лекциях звукозаписывающих устройств (диктофонов и т.д.). На лекциях и практических занятиях при необходимости допускается присутствие ассистента. При проведении промежуточной аттестации для лиц с нарушением зрения тестирование может быть заменено на устное собеседование по вопросам. При необходимости время подготовки на экзамене может быть увеличено. Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата при необходимости допускается присутствие ассистента на лекциях и практических занятиях. Промежуточная аттестация для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата проводится на общих основаниях, при необходимости процедура экзамена может быть реализована дистанционно.

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература:

№п/п	Источник
1	Курош, А.Г. Курс высшей алгебры [Электронный ресурс] : учебник. – Электрон. дан. – СПб. : Лань, 2013. – 432 с. – Режим доступа: http://lanbook.lib.vsu.ru/books/element.php?pl1_id=30198

б) дополнительная литература:

№п/п	Источник
1	Панкратьев Е.В. Элементы компьютерной алгебры – М.: Интернет-университет информационных технологий; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. – 247 с. (Серия «Основы информатики и математики». Серия издается совместно с Московским государственным университетом им. М.В. Ломоносова при поддержке корпорации Microsoft)
2	Фаддеев, Д.К. Лекции по алгебре [Электронный ресурс] : учебное пособие. – Электрон. дан. – СПб. : Лань, 2007. – 416 с. – Режим доступа: http://lanbook.lib.vsu.ru/books/element.php?pl1_id=397
3	Фаддеев, Д.К. Задачи по высшей алгебре [Электронный ресурс] : учебник / Д.К. Фаддеев, И.С. Соминский. – Электрон. дан. – СПб. : Лань, 2008. – 288 с. – Режим доступа: http://lanbook.lib.vsu.ru/books/element.php?pl1_id=399
4	Кострикин А.И. Введение в алгебру. – М. : Физматлит, 2004. – Ч. 2 : Линейная алгебра. – 367 с.
5	Шевцов Г.С. Линейная алгебра. – М. : Гардарики, 1999. – 359 с.
6	Кук Д., Бейз Г. Компьютерная математика. – М. : Наука, 1990. – 384 с.

в) информационные электронно-образовательные ресурсы (официальные ресурсы интернет):

№п/п	Ресурс
1	ЗНБ ВГУ: https://lib.vsu.ru/
2	Электронно-библиотечная система "Университетская библиотека online": http://biblioclub.ru/
3	Электронно-библиотечная система "Лань": https://e.lanbook.com/
4	Электронно-библиотечная система "Консультант студента": http://www.studmedlib.ru

5	Электронный университет ВГУ: https://edu.vsu.ru/

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы

№п/п	Источник
1	Вахитова Е. В. Фундаментальная и компьютерная алгебра. Часть I. Структуры алгебры : учебно-методическое пособие для вузов / С. В. Борзунов, Р.Х. Вахитов, Е. В. Вахитова. – Воронеж: Изд. - полиграф. центр ВГУ, 2012. – 117 с.
2	Вахитова Е. В. Фундаментальная и компьютерная алгебра. Часть II. Линейная алгебра : учебно-методическое пособие для вузов / Р. Х. Вахитов, Е. В. Вахитова. – Воронеж: Изд. - полиграф. центр ВГУ, 2012. – 184 с
3	Вахитова Е. В. Фундаментальная и компьютерная алгебра. Часть III. Алгебра многочленов : учебно-методическое пособие для вузов / Р. Х. Вахитов, Е. В. Вахитова. – Воронеж: Изд. - полиграф. центр ВГУ, 2012. – 111 с.
4	Вахитова Е. В. Фундаментальная и компьютерная алгебра. Часть IV. Компьютерная алгебра : учебно-методическое пособие для вузов / Р. Х. Вахитов, Е. В. Вахитова. – Воронеж: Изд. - полиграф. центр ВГУ, 2012. – 42 с.
5	Вахитова Е. В. Фундаментальная и компьютерная алгебра : учебное пособие / Е. В. Вахитова, С. Р. Вахитова, Р. Х. Вахитов. – Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2015. – 436 с.

17. Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ, электронное обучение (ЭО), смешанное обучение)

Подборка, изучение и анализ литературных источников по заданным темам, подготовка к практическим занятиям, текущим аттестациям, экзамену.

При реализации дисциплины могут использоваться технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии на базе портала edu.vsu.ru, а также другие доступные ресурсы сети Интернет.

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Аудитория для лекционных занятий: специализированная мебель (столы ученические, стулья, доска).

Аудитория для практических занятий: специализированная мебель (столы ученические, стулья, доска).

---

19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1	Системы линейных уравнений, матрицы и определители (1 семестр). Многочлены над произвольным полем (2 семестр).	ОПК - 1	ОПК – 1.1	Контрольная работа №1 (1 семестр). Контрольная работа №1 (2 семестр).
2	Векторные пространства и линейные операторы (1 семестр). Многочлены над полем комплексных чисел (2 семестр).	ОПК - 1	ОПК – 1.2	Контрольная работа №2 (1 семестр). Контрольная работа №2 (2 семестр).

№п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
3	Группы, кольца, поля; комплексные числа (1 семестр). Многочлены над полем действительных чисел. Введение в компьютерную алгебру (2 семестр).	ОПК - 1	ОПК – 1.3	Контрольная работа №3 (1 семестр). Контрольная работа №3 (2 семестр).
Промежуточная аттестация форма контроля – экзамен				

20. Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

20.1. Текущий контроль успеваемости

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью контрольных работ

1 семестр

Контрольная работа № 1

КИМ 1

Задание 1 (15 баллов). Решить СЛУ по правилу Крамера: $x+y+2z=-1$, $2x-y+2z=-4$, $4x+y+4z=-2$. (1)
Задание 2 (15 баллов). Записать СЛУ (1) в матричной форме и решить полученное матричное уравнение.
Задание 3 (20 баллов). Решить СЛУ с параметром: $x+my+z=m$, $mx+y+z=1$, $x+y+mz=m^2$.

КИМ 2

Задание 1 (15 баллов). Решить СЛУ методом Гаусса: $x+2y+4z=31$, $5x+y+2z=29$, $3x-2y+z=10$. (1)
Задание 2 (15 баллов). Записать СЛУ (1) в матричной форме и решить полученное матричное уравнение.
Задание 3 (20 баллов). Решить СЛУ с параметром: $x+y+az=a^2$, $ax+y+z=1$, $x+ay+z=a$.

Контрольная работа № 2

КИМ 1

Задание 1 (15 баллов). Исследовать на линейную зависимость систему векторов $\boldsymbol{b_1}$=(1,2,1), $\boldsymbol{b_2}$=(2,3,3), $\boldsymbol{b_3}$=(3,7,1).
Задание 2 (15 баллов). Найти базис и размерность векторного пространства V над полем **R**, состоящего из всех квадратных матриц порядка 2 с элементами a, b, c, d - действительными числами.
Задание 3 (20 баллов). Исследовать, приводима ли матрица A с верхней строкой (2,1) и нижней строкой (9,2) линейного оператора f к диагональной матрице.

КИМ 2

Задание 1 (15 баллов). Исследовать на линейную зависимость систему векторов $\boldsymbol{v_1}$=(5,4,3), $\boldsymbol{v_2}$=(3,3,2), $\boldsymbol{v_3}$=(8,1,3).
Задание 2 (15 баллов). Найти базис и размерность векторного пространства V над полем **R**, состоящего из всех квадратных матриц порядка 2 с элементами p, q, r, s - действительными числами.
Задание 3 (20 баллов). Исследовать, приводима ли матрица A с верхней строкой (1,0) и нижней строкой (-2,2) линейного оператора h к диагональной матрице.

Контрольная работа № 3

КИМ 1

Задание 1 (15 баллов). Извлечь в поле комплексных чисел **C** кубический корень из 1.
Задание 2 (15 баллов). Доказать, что множество целых чисел, кратных 5, является подгруппой аддитивной группы целых чисел.
Задание 3 (20 баллов). Исследовать, сохраняет ли неглавную операцию "вычитание" гомоморфизм f кольца R_1 на кольцо R_2.

КИМ 2

Задание 1 (15 баллов). Извлечь в поле комплексных чисел **C** кубический корень из -1.

Задание 2 (15 баллов). Доказать, что множество целых чисел, кратных 3, является подгруппой аддитивной группы целых чисел.

Задание 3 (20 баллов). Исследовать, сохраняет ли неглавную операцию "вычитание" гомоморфизм g кольца K_1 на кольцо K_2.

2 семестр

Контрольная работа № 4

КИМ 1

Задание 1 (15 баллов). Найти остаток от деления многочлена $f(x)=4x^3+x$ на $f(x)=x+1+i$ ($i^2+1=0$), пользуясь схемой Горнера.

Задание 2 (15 баллов). Найти наибольший общий делитель многочленов $f(x)=x^3+2x^2+3x+2$ и $g(x)=x^3-x^2-4$.

Задание 3 (20 баллов). Найти необходимое и достаточное условие делимости многочлена $f(x)$ на $g(x)$, если $f(x)=x^3+2x^2+ax-3$ на $f(x)=x^2+px+q$.

КИМ 2

Задание 1 (15 баллов). Найти остаток от деления многочлена $f(x)=x^3-x^2-x$ на $f(x)=x-1+2i$, ($i^2+1=0$), пользуясь схемой Горнера.

Задание 2 (15 баллов). Найти наибольший общий делитель многочленов $f(x)=x^4+x^3+x^2-x-2$ и $g(x)=x^3-x^2-4$.

Задание 3 (20 баллов). Найти необходимое и достаточное условие делимости многочлена $f(x)$ на $g(x)$, если $f(x)=x^3+ax^2+3x+c$ на $f(x)=x^2+px+2$.

Контрольная работа № 5

КИМ 1

Задание 1 (15 баллов). Разложить многочлен $f(x)=x^{12}-2x^6+1$ в произведение неприводимых многочленов над полем комплексных чисел.

Задание 2 (15 баллов). Решить уравнение в **C**: $z^3-6z+4=0$.

Задание 3 (20 баллов). Решить уравнение в **R**: $x^3-3x+2=0$.

КИМ 2

Задание 1 (15 баллов). Разложить многочлен $f(x)=x^{12}+2x^6+1$ в произведение неприводимых многочленов над полем комплексных чисел.

Задание 2 (15 баллов). Решить уравнение в **C**: $z^3+3z^2-3z-14=0$.

Задание 3 (20 баллов). Решить уравнение в **R**: $x^3-5x+4=0$.

Контрольная работа № 6

КИМ 1

Задание 1 (15 баллов). Найти рациональные корни многочлена $f(x)=x^4+3x^3+4x^2+18+18$.

Задание 2 (15 баллов). Разложить многочлен над полем действительных чисел $f(x)=x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$ в произведение неприводимых многочленов.

Задание 3 (20 баллов). Доказать, что многочлен $f(x)=2x^3-9x+6$ неприводим над полем Q.

КИМ 2

Задание 1 (15 баллов). Найти рациональные корни многочлена $f(x)=3x^4-2x^3+3x^2+x^6-2$.

Задание 2 (15 баллов). Разложить многочлен над полем действительных чисел $f(x)=x^5+x^4+x^3-x^2-x-1$ в произведение неприводимых многочленов.

Задание 3 (20 баллов). Доказать, что многочлен $f(x)=2x^3-4x+6$ неприводим над полем Q.

Критерии оценивания контрольных работ

– 0-24 балла — «неудовлетворительно»
– 25-34 балла — «удовлетворительно»
– 35-44 балла — «хорошо»
– 45-50 баллов — «отлично»

Задания для контроля остаточных знаний

Задания с выбором ответа

№	Задание	Варианты ответа	Верный ответ
1	Решить систему линейных уравнений методом Гаусса: $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$	1) $\varnothing$ 2) (1, 2, 3) 3) (1, 2, –2) 4) (–1, 2, 2) 5) бесконечное множество решений	3)
2	Решить систему линейных уравнений правилу Крамера: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10. \end{cases}$	1) $\varnothing$ 2) бесконечное множество решений 3) (1, 2, 3) 4) $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ 5) (3, 4, 5)	4)
3	Решить систему линейных уравнений методом последовательного исключения переменных: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10. \end{cases}$	1) $\varnothing$ 2) бесконечное множество решений 3) (1, 2, 3) 4) $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ 5) (3, 4, 5)	5)
4	Решить систему линейных уравнений правилу Крамера: $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$	1) бесконечное множество решений 2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ 3) $\varnothing$ 4) (1, 3, 2) 5) (1, 2, –2)	2)
5	Решить систему линейных уравнений с параметром: $\begin{cases} 2x_1 + mx_2 = 3, \\ 3x_1 + 5x_2 = m. \end{cases}$	1) $\varnothing$ 2) бесконечное множество решений 3) $\left(\frac{m^2+15}{m+10}, \frac{2m-9}{3m+10}\right)$ 4) $\left(0, \frac{2m-9}{3m+10}\right)$ 5) а) если $m = -\frac{10}{3}$, то бесконечное множество решений; б) если $m \neq -\frac{10}{3}$, то одно решение $\left(\frac{m^2+15}{m+10}, \frac{2m-9}{3m+10}\right)$	5)
6	Извлечь в **C** $\sqrt[3]{1}$ $(i^2 = -1)$.	1) $0, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 2) $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 3) 1 4) $1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 5) 1, –1	4)

7	Извлечь в **С** $\sqrt[3]{-1}$ $(i^2 = -1)$.	1) $-1, \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 2) $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 3) 0, 1, –1 4) $-1, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 5) $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$	1)
8	Решить матричное уравнение $AX = B$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$.	1) бесконечное множество решений 2) $\varnothing$ 3) (0, 1, 2) 4) (1, 2, –2) 5) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$	5)
9	Решить матричное уравнение $AX = B$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$.	1) $\varnothing$ 2) бесконечное множество решений 3) $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ 5) (2, 0)	4)
10	Найти обратную матрицу A^{-1} для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.	1) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ 2) не существует A^{-1} 3) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ 3 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	1)

<u>Задания с кратким ответом</u>

№	Задание	Верный ответ
1	Исследовать систему линейных уравнений: $\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 2, \\ 6x_1 + 2x_2 = 4, \\ 9x_1 + 3x_2 = 6. \end{cases}$	бесконечное множество решений
2	Для квадратной матрицы *A* выполнены условия: $\exists A^{-1}$, $AA^{-1}=E$, $A^{-1}A=E$, *E* – единичная матрица. Матрица *A* называется …	обратимой
3	Для матрицы $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ матрица B^{-1} равна …	$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$
4	В определителе *d* есть нулевая строка. Определитель *d* равен …	0
5	Если матрица *A* имеет вид $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, то $\lvert A \rvert$ можно вычислить без правила треугольника так: …	$\lvert A \rvert = a_{33}A_{33} = -6$

<u>Задания с развёрнутым ответом</u>

Задача 1. Решить систему линейных уравнений методом последовательного исключения переменных:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10. \end{cases}$$

Решение. Обозначим основную и расширенную матрицу СЛУ:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & 4 & 31 \\ 5 & 1 & 2 & 29 \\ 3 & -1 & 1 & 10 \end{array}\right)$$

Жирным шрифтом выделим ведущий элемент строки в матрице.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & 4 & 31 \\ 5 & 1 & 2 & 29 \\ 3 & -1 & 1 & 10 \end{array}\right) \tilde{а} \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & 4 & 31 \\ 0 & -9 & -18 & -126 \\ 0 & -7 & -11 & -83 \end{array}\right) \tilde{б} \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & 4 & 31 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 14 \\ 0 & -7 & -11 & -83 \end{array}\right) \tilde{в} \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & 4 & 31 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 14 \\ 0 & 0 & \mathbf{3} & 15 \end{array}\right) \tilde{г} \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & 4 & 31 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 14 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 5 \end{array}\right),$$ где

приняты следующие обозначения:

$\tilde{а}$ 1-ю строку умножим на (–5) и прибавим ко 2-й строке, затем 1-ю строку умножим на (–3) и прибавим к 3-й строке,

$\tilde{б}$ 2-ю строку умножим на (–1/9),

$\tilde{в}$ 2-ю строку умножим на 7 и прибавим к 3-й строке,

$\tilde{г}$ 3-ю строку умножим на 1/3.

Ранг матрицы равен числу ненулевых строк ступенчатой матрицы, поэтому r_A=3, r_B=3, r_A=r_B, $\Rightarrow$ СЛУ совместна.

Ранг матрицы r=r_A=r_B равен числу переменных n=3 $\Rightarrow$ СЛУ имеет одно решение.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31, \\ \quad x_2 + 2x_3 = 14, \\ \quad\quad x_3 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3, \\ \quad x_2 = 4, \\ \quad\quad x_3 = 5. \end{cases}$$

Итак, СЛУ имеет одно решение (3,4,5).

Ответ. (3,4,5).

Критерии оценивания	Баллы
Имеется верная последовательность всех этапов решения, обоснованно получен верный ответ.	3
Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, при этом имеется верная последовательность всех этапов решения.	2
Получен верный ответ, однако имеются пропуски одного или двух этапов решения ИЛИ Решение не завершено, однако верно выполнен хотя бы один из этапов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Задача 2. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$$

Решение. В СЛУ 3 уравнения и 3 переменные, поэтому можно решать по правилу Крамера. Вычислим главный определитель СЛУ.

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -4 + 8 + 4 + 8 - 2 - 8 = 6$, Δ=6,

$\Delta \neq 0$, $\Rightarrow$ СЛУ имеет одно решение, которым является вектор-столбец.

Вычислим вспомогательные определители.

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 - 8 - 4 + 2 + 16 = 6$, Δ_1=6,

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -16 - 8 - 8 + 32 + 4 + 8 = 12$, Δ_2=12,

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 - 16 - 2 - 4 + 4 + 4 = -12$, Δ=–12,

Решение СЛУ имеет вид вектора-столбца: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, где $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$, $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$.

$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{6}{6} = 1$,

$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{12}{6} = 2$,

$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-12}{6} = -2$.

Итак, вектор-столбец $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ является решением СЛУ.

Ответ. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Критерии оценивания	Баллы
Имеется верная последовательность всех этапов решения, обоснованно получен верный ответ.	3
Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, при этом имеется верная последовательность всех этапов решения.	2
Получен верный ответ, однако имеются пропуски одного или двух этапов решения ИЛИ Решение не завершено, однако верно выполнен хотя бы один из этапов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Задача 3. Записать систему линейных уравнений (1) в матричной форме записи и решить полученное матричное уравнение.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases} \qquad (1)$$

Решение. Матричное уравнение: $AX = B$, где

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}$

(A, X, B – матрицы размерности соответственно 3×3, 3×1, 3×1).

Если $|A| \neq 0$, то матричное уравнение имеет одно решение вектор-столбец $X=A^{-1}B$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -4 + 8 + 4 + 8 - 2 - 8 = 6,$$

$|A| \neq 0 \Rightarrow$ одно решение $X=A^{-1}B$.

Обратную матрицу можно найти по формуле $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^T_{доп}$.

Матрица, составленная из алгебраических дополнениЙ, $A_{доп} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$.

$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -6$, $A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 0$, $A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 6$,

$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -2$, $A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -4$, $A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3$,

$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4$, $A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2$, $A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3$,

$A_{доп} = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 6 \\ -2 & -4 & 3 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$,

$A^T_{доп} = \begin{pmatrix} -6 & -2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 6 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^T_{доп}. = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -6 & -2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 6 & 3 & -3 \end{pmatrix}$,

$X=A^{-1}B= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -6 & -2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 6 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}, = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ (решение СЛУ в матричной форме записи).

Ответ. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Критерии оценивания	Баллы
Имеется верная последовательность всех этапов решения, обоснованно получен верный ответ.	3
Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, при этом имеется верная последовательность всех этапов решения.	2
Получен верный ответ, однако имеются пропуски одного или двух этапов решения ИЛИ Решение не завершено, однако верно выполнен хотя бы один из этапов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Задача 4. Исследовать на линейную зависимость систему векторов $\overline{b_1} = (1,2,1), \overline{b_2} = (2,3,3),\ \overline{b_3} = (3,7,1).$

Решение. Составим матрицу из векторов-строк $\overline{b_1}, \overline{b_2},\ \overline{b_3}$ и найдем ее определитель.

d=$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 18 + 14 - 9 - 21 - 4 = 1,$

d≠0 ⇒ система векторов $\overline{b_1}, \overline{b_2},\ \overline{b_3}$ не является линейно зависимой.

Ответ. Не является линейно зависимой.

Критерии оценивания	Баллы
Имеется верная последовательность всех этапов решения, обоснованно получен верный ответ.	3
Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, при этом имеется верная последовательность всех этапов решения.	2
Получен верный ответ, однако имеются пропуски одного или двух этапов решения ИЛИ Решение не завершено, однако верно выполнен хотя бы один из этапов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Задача 5. Исследовать на линейную зависимость систему векторов $\overline{a_1} = (5,4,3), \overline{a_2} = (3,3,2),\ \overline{a_3} = (8,1,3).$

Решение. Составим матрицу из векторов-строк $\overline{a_1}, \overline{a_2},\ \overline{a_3}$ и найдем ее определитель.

d=$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \\ 8 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 45 + 64 + 9 - 72 - 10 - 36 = 0,$

d=0 ⇒ ⇒ система векторов $\overline{a_1}, \overline{a_2},\ \overline{a_3}$ является линейно зависимой.

Ответ. Является линейно зависимой.

Критерии оценивания	Баллы
Имеется верная последовательность всех этапов решения, обоснованно получен верный ответ.	3
Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, при этом имеется верная последовательность всех этапов решения.	2
Получен верный ответ, однако имеются пропуски одного или двух этапов решения ИЛИ Решение не завершено, однако верно выполнен хотя бы один из этапов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

20.2. Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

Перечень вопросов к экзамену

1 семестр

1. Система линейных уравнений (СЛУ) над полем, понятия решения СЛУ, следствия СЛУ.
2. Равносильные СЛУ, теорема.
3. Векторная форма записи СЛУ.
4. Однородная СЛУ, неоднородная СЛУ, теорема о сумме решения совместной неоднородной СЛУ и решения соответствующей однородной СЛУ.
5. Теорема о разности двух решений совместной неоднородной СЛУ.
6. Критерий совместности СЛУ, фундаментальная система решений однородной СЛУ.
7. Решение СЛУ методом последовательного исключения переменных.
8. Матрицы размерности $m \times n$ над полем, их виды и операции над ними.
9. Ступенчатая матрица, ранг матрицы, теоремы, 1-й способ вычисления ранга матрицы.
10. Обратимая матрица, обратная матрица, теорема.
11. Теоремы о необратимости квадратной матрицы.
12. 1-й способ вычисления обратной матрицы.
13. Определитель квадратной матрицы, свойства, определитель произведения матриц.
14. Необходимое и достаточное условия равенства нулю определителя.
15. Минор элемента, алгебраическое дополнение, минор k-го порядка.
16. 2-й способ вычисления ранга матрицы и обратной матрицы.
17. Теорема о разложении определителя по строке (или столбцу).
18. Матричная форма записи СЛУ, теорема.
19. Правило Крамера.
20. Условия, при которых однородная СЛУ из n уравнений с n переменными имеет нетривиальные решения.
21. Арифметическое n-мерное векторное пространство, свойства.
22. Векторное (линейное) пространство над полем, свойства.
23. Подпространство, линейная комбинация, линейная оболочка.
24. Линейная зависимость и линейная независимость системы векторов, свойства линейной зависимости.
25. Эквивалентные системы векторов, базис и ранг конечной системы векторов.
26. Базис и размерность векторного пространства.
27. Теорема о разложении вектора по базису.
28. Изоморфизм векторных пространств.
29. Ортогональная система векторов, ортогональное дополнение к подпространству.
30. Евклидово векторное пространство.
31. Линейное отображение, теорема о сохранении линейной комбинации.
32. Линейный оператор, матрица линейного оператора.
33. Матрица перехода одного базиса к другому.
34. Теорема о связи между координатами вектора и координатами его образа.
35. Теорема о связи между координатами вектора в различных базисах.
36. Теорема о связи между матрицами линейного оператора в различных базисах.
37. Обратимый линейный оператор, обратный линейный оператор, теорема.
38. Дефект и ранг линейного оператора, теорема о связи между ними.
39. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора.
40. Характеристическое уравнение.
41. Группа, пример.
42. Подгруппа, пример.
43. Простейшие свойства группы.
44. Гомоморфизм групп.
45. Кольцо, пример.
46. Подкольцо, пример.
47. Простейшие свойства кольца.
48. Гомоморфизм колец.
49. Поле, пример.
50. Подполе, пример.
51. Простейшие свойства поля.

52. Гомоморфизм полей.
53. Числовое поле, пример.
54. Теорема о наименьшем числовом поле.
55. Операции над комплексными числами в алгебраической форме.
56. Извлечение квадратного корня из комплексного числа в алгебраической форме.
57. Тригонометрическая форма комплексного числа.
58. Операции над комплексными числами в тригонометрической форме.
59. Формула Муавра.
60. Извлечение корня n-й степени (n - натуральное число, n>1) из комплексного числа в тригонометрической форме.

2 семестр

1. Многочлен от одной переменной, степень многочлена.
2. Деление многочлена на двучлен x-c. Теорема Безу.
3. Корни многочлена, теорема о корне многочлена.
4. Теорема о делении с остатком.
5. Наибольший общий делитель.
6. Свойства НОД.
7. Алгоритм Евклида.
8. Наименьшее общее кратное.
9. Неприводимые над полем многочлены.
10. Разложение многочлена над произвольным полем в произведение нормированных неприводимых многочленов и его единственность.
11. Схема Горнера.
12. Кратные корни многочлена.
13. Алгебраически замкнутое поле.
14. Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел.
15. Разложение многочлена над полем комплексных чисел в произведение неприводимых многочленов.
16. Зависимость между корнями и коэффициентами многочлена.
17. Сопряженность мнимых корней многочлена с действительными коэффициентами.
18. Разложение многочлена над полем действительных чисел в произведение неприводимых многочленов.
19. Уравнение третьей степени.
20. Уравнение четвертой степени.
21. Целые и рациональные корни многочлена с целыми коэффициентами.
22. Критерий неприводимости (Эйзенштейна).
23. Понятие квадратичной формы.
24. Матрица и ранг квадратичной формы.
25. Запись квадратичной формы в виде произведения матриц.
26. Канонический вид квадратичной формы.
27. Основная теорема о квадратичных формах.
28. Сигнатура квадратичной формы.
29. Положительно определенная квадратичная форма.
30. Отрицательно определенная квадратичная форма.
31. Об отличиях компьютерной алгебры.
32. Системы компьютерной алгебры.
33. Алгоритмы компьютерной алгебры.
34. О представлении данных.
35. Определение систематической записи.
36. Арифметические операции.
37. Перевод в десятичную систему счисления и обратно.
38. Перевод из g-ичной системы в h-ичную систему.
39. Определение сравнения по натуральному модулю.
40. Полная система вычетов.
41. Аддитивная группа классов вычетов.
42. Кольцо классов вычетов.
43. Определение алгебраического числа.
44. Минимальный многочлен алгебраического числа.
45. Операции над алгебраическими числами.
46. Поле алгебраических чисел.

47. Представление целых чисел.
48. Представление классов вычетов.
49. Представление рациональных чисел.
50. Представление алгебраических чисел.

Перечень практических заданий

1 семестр

1. Решить СЛУ по правилу Крамера: $x+y+2z=-1$, $2x-y+2z=-4$, $4x+y+4z=-2$.
2. Записать СЛУ $x+y+2z=-1$, $2x-y+2z=-4$, $4x+y+4z=-2$, в матричной форме и решить полученное матричное уравнение.
3. Решить СЛУ с параметром $x+my+z=m$, $mx+y+z=1$, $x+y+mz=m^2$.
4. Решить СЛУ методом Гаусса $x+2y+4z=31$, $5x+y+2z=29$, $3x-2y+z=10$.
5. Записать СЛУ $x+2y+4z=31$, $5x+y+2z=29$, $3x-2y+z=10$ в матричной форме и решить полученное матричное уравнение.
6. Решить СЛУ с параметром $x+y+az=a^2$, $ax+y+z=1$, $x+ay+z=a$.
7. Решить СЛУ по правилу Крамера: $x+y+2z=-1$, $3x+4z=-5$, $4x+2y+6z=-3$.
8. Записать СЛУ $x+y+2z=-1$, $3x+4z=-5$, $4x+2y+6z=-3$, в матричной форме и решить полученное матричное уравнение.
9. Решить СЛУ с параметром $x+ky+z=k$, $kx+y+z=1$, $x+y+kz=k^2$.
10. Решить СЛУ методом Гаусса $x+2y+4z=31$, $5x+y+2z=29$, $6x-4y+2z=20$.
11. Исследовать на линейную зависимость систему векторов $\boldsymbol{a}_1=(5,4,3)$, $\boldsymbol{a}_2=(3,3,2)$, $\boldsymbol{a}_3=(8,1,3)$,
12. Найти базис и размерность векторного пространства V над полем **R**, состоящего из всех квадратных матриц порядка 2 с элементами *a, b, c, d* - действительными числами.
13. Исследовать, приводима ли матрица A с верхней строкой (2,1) и нижней строкой (9,2) линейного оператора f к диагональной матрице.
14. Исследовать на линейную зависимость систему векторов $\boldsymbol{b}_1=(1,2,1)$, $\boldsymbol{b}_2=(2,3,3)$, $\boldsymbol{b}_3=(3,7,1)$.
15. Найти базис и размерность векторного пространства V над полем **R**, состоящего из всех квадратных матриц порядка 2 с элементами *p, q, r, s* - действительными числами.
16. Исследовать, приводима ли матрица A с верхней строкой (1,0) и нижней строкой (-2,2) линейного оператора h к диагональной матрице.
17. Исследовать на линейную зависимость систему векторов $\boldsymbol{v}_1=(5,2,1)$, $\boldsymbol{v}_2=(2,3,4)$, $\boldsymbol{v}_3=(7,5,1)$.
18. Найти базис и размерность векторного пространства V над полем **R**, состоящего из всех квадратных матриц порядка 2 с элементами *k, l, m, n* - действительными числами
19. Исследовать, приводима ли матрица A с верхней строкой (2,3) и нижней строкой (-7,1) линейного оператора g к диагональной матрице.
20. Исследовать на линейную зависимость систему векторов $\boldsymbol{u}_1=(1,2,4)$, $\boldsymbol{u}_2=(2,5,6)$, $\boldsymbol{u}_3=(3,6,4)$.
21. Извлечь в поле комплексных чисел **C** кубический корень из 1.
22. Доказать, что множество целых чисел, кратных 5, является подгруппой аддитивной группы целых чисел.
23. Исследовать, сохраняет ли неглавную операцию "вычитание" гомоморфизм g кольца K_1 на кольцо K_2.
24. Извлечь в поле комплексных чисел **C** кубический корень из -1.
25. Доказать, что множество целых чисел, кратных 3, является подгруппой аддитивной группы целых чисел.
26. Исследовать, сохраняет ли неглавную операцию "вычитание" гомоморфизм f кольца R_1 на кольцо R_2.
27. Извлечь в поле комплексных чисел **C** кубический корень из i.
28. Доказать, что множество целых чисел, кратных 7, является подгруппой аддитивной группы целых чисел.
29. Исследовать, сохраняет ли неглавную операцию "вычитание" гомоморфизм h кольца A_1 на кольцо A_2.
30. Извлечь в поле комплексных чисел **C** кубический корень из $-i$.

2 семестр

1. Разложить многочлен $f(x)=x^{12}-2x^6+1$ на неприводимые многочлены над полем комплексных чисел.
2. Решить уравнение в **C**: $z^3-6z+4=0$.
3. Доказать, что многочлен $f(x)=2x^3-9x+6$ неприводим над полем Q.
4. Найти рациональные корни многочлена $f(x)=3x^4-2x^3+3x^2+x^6-2$.

5. Решить уравнение в **R**: $x^3-3x+2=0$.
6. Найти остаток от деления многочлена $f(x)=4x^3+x$ на $f(x)=x+1+i$ ($i^2+1=0$), пользуясь схемой Горнера.
7. Найти остаток от деления многочлена $f(x)=x^3-x^2-x$ на $f(x)=x-1+2i$, ($i^2+1=0$), пользуясь схемой Горнера.
8. Доказать, что многочлен $f(x)=2x^3+3x+6$ неприводим над полем Q.
9. Решить уравнение в **C**: $z^3+3z^2-3z-14=0$.
10. Решить уравнение в **R**: $x^3-5x+4=0$.
11. Найти наибольший общий делитель многочленов $f(x)=x^4+x^3+x^2-x-2$ и $g(x)=x^3-x^2-4$.
12. Найти наибольший общий делитель многочленов $f(x)=x^3+2x^2+3x+2$ и $g(x)=x^3-x^2-4$.
13. Найти необходимое и достаточное условие делимости многочлена $f(x)$ на $g(x)$, если $f(x)=x^3+2x^2+ax-3$ на $f(x)=x^2+px+q$.
14. Найти необходимое и достаточное условие делимости многочлена $f(x)$ на $g(x)$, если $f(x)=x^3+ax^2+3x+c$ на $f(x)=x^2+px+2$.
15. Найти корни многочлена $f(z)=z^3-3z+2$.
16. Разложить многочлен $f(x)=x^{12}+2x^6+1$ в произведение неприводимых многочленов над полем комплексных чисел.
17. Найти рациональные корни многочлена $f(x)=x^4+3x^3+4x^2+18+18$.
18. Выполнить деление на двучлен "уголком" и по схеме Горнера: $f_1=4x^3+x^2$, $f_2=x+1-i$, где $i^2=-1$.
19. Разложить многочлен над полем действительных чисел $f(x)=x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$ в произведение неприводимых многочленов.
20. Разложить многочлен над полем действительных чисел $f(x)=x^5+x^4+x^3-x^2-x-1$ в произведение неприводимых многочленов.
21. Выполнить деление с остатком: $f=2x^5+3x^4-6x^3-5x+7$, $g=x^3+2x^2-3x+1$.
22. Найти остаток от деления по схеме Горнера: $f=x^4-2x^3+4x^2-6x+8$, $h=x-1$.
23. Найти остаток от деления по схеме Горнера: $f=2x^5-5x^3-8x$, $g=x+3$.
24. Найти наибольший общий делитель многочленов: $f=x^3-x^2+3x-10$, $h=3x^3+10x^2+2x-3$.
25. Найти кратность корня c многочлена f, если $f=x^5+6x^4+11x^3+2x^2-12x-8$.

Примечание. Номер задачи соответствует номеру КИМ на экзамене.

Для оценивания результатов обучения на экзамене используется 4-балльная шала: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
Полное соответствие ответа обучающегося всем перечисленным критериям. Обучающийся демонстрирует высокий уровень владения материалом, ориентируется в предметной области, верно отвечает на все дополнительные вопросы.	Повышенный уровень	Отлично
Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует одному или двум из перечисленных показателей, но обучающийся дает правильные ответы на дополнительные вопросы. Допускаются ошибки при воспроизведении части теоретических положений.	Базовый уровень	Хорошо
Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует любым трём из перечисленных показателей, обучающийся дает неполные ответы на дополнительные вопросы. Сформированные знания основных понятий, определений и теорем, изучаемых в курсе, не всегда полное их понимание с затруднениями при воспроизведении.	Пороговый уровень	Удовлетворительно
Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует любым четырём из перечисленных показателей. Обучающийся демонстрирует отрывочные знания (либо их отсутствие) основных понятий, определений и теорем, используемых в курсе.	–	Неудовлетворительно